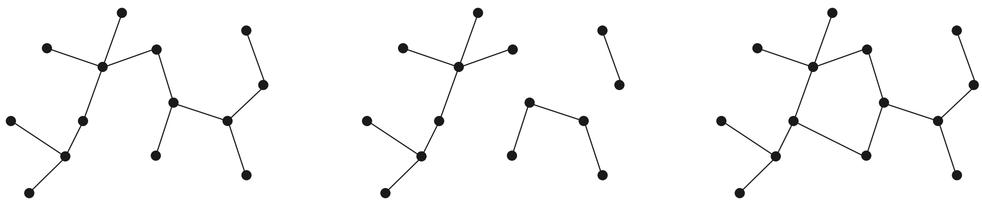


(a) (b) (c)

Rysunek B.4 (a) Drzewo wolne. (b) Las. (c) Graf, który zawiera cykl, a więc nie jest ani drzewem, ani lasem

Następujące twierdzenie przedstawia wiele ważnych faktów dotyczących drzew wolnych.

Twierdzenie B.2 (Własności drzew wolnych)
Niech $G = (V, E)$ będzie grafem nieskierowanym. Następujące stwierdzenia są równoważne.

(1) G jest drzewem wolnym.

(2) Każde dwa wierzchołki G są połączone ze sobą dokładnie jedną ścieżką prostą.

(3) G jest spójny, lecz jeśli usuniemy którąkolwiek z krawędzi z E, to powstały graf jest niespójny.

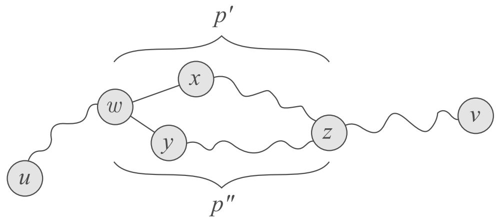
(4) G jest spójny i $|E| = |V| - 1$.

(5) G jest acykliczny i $|E| = |V| - 1$.

(6) G jest acykliczny, lecz jeśli dodamy do E jakąkolwiek krawędź, to powstały graf zawiera cykl.

Dowód (1) $\Rightarrow$ (2): Ponieważ drzewo jest spójne, każde dwa wierzchołki G są połączone co najmniej jedną ścieżką prostą. Niech u i v będą wierzchołkami połączonymi dwiema różnymi ścieżkami prostymi p_1 i p_2, jak to widać na rys. B.5. Niech w będzie wierzchołkiem, w którym ścieżki po raz pierwszy się rozchodzą; tzn. w jest pierwszym wierzchołkiem, przez który przechodzą ścieżki p_1 i p_2 i którego następnikiem na p_1 jest x, a następnikiem na p_2 jest y, gdzie $x \neq y$. Niech z będzie pierwszym wierzchołkiem, w którym ścieżki schodzą się ponownie; a więc z jest pierwszym wierzchołkiem po w na p_1, który znajduje się również na p_2. Niech $p' = w \to x \leadsto z$ będzie podścieżką p_1, która prowadzi z w przez x do z, czyli $p_1 = u \leadsto w \overset{p'}{\leadsto} z \leadsto v$, i niech $p''w \to y \leadsto z$ będzie podścieżką p_2, która prowadzi z w przez y do z, czyli $p_2 = u \leadsto w \overset{p''}{\leadsto} z \leadsto v$. Ścieżki p' i p'' nie mają wspólnych wierzchołków poza swoimi końcami. Zatem ścieżka otrzymana przez złożenie p' i odwróconej ścieżki p'' jest cyklem, co przeczy acykliczności drzewa. Tak więc jeśli G jest drzewem, to może istnieć najwyżej jedna ścieżka prosta między dwoma wierzchołkami.

(2) $\Rightarrow$ (3): Jeśli każde dwa wierzchołki G są połączone jedyną ścieżką prostą, to G jest spójny. Niech (u, v) będzie dowolną krawędzią z E. Ta krawędź jest ścieżką z u do v, musi więc



Rysunek B.5 Jeden z kroków w dowodzie twierdzenia B.2: jeżeli (1) G jest drzewem wolnym, to (2) dowolne dwa wierzchołki G są ze sobą połączone jedyną ścieżką prostą. Przypuśćmy (przez zaprzeczenie), że wierzchołki u i v są połączone dwiema różnymi ścieżkami prostymi p_1 i p_2. Ścieżki te pierwszy raz rozchodzą się w wierzchołku w i pierwszy raz schodzą się ponownie w wierzchołku z. Ścieżka p' złożona razem z odwróconą ścieżką p'' tworzy cykl, co prowadzi do sprzeczności

być jedyną ścieżką łączącą u i v. Jeśli usuniemy (u, v) z G, przestanie istnieć ścieżka z u do v, więc operacja ta rozspójnia G.

(3) $\Rightarrow$ (4): Przyjmując, że graf G jest spójny i uwzględniając zadanie B.4-3, mamy $|E| \geq |V| - 1$. Udowodnimy przez indukcję, że $|E| \leq |V| - 1$. Graf spójny o $n = 1$ lub $n = 2$ wierzchołkach ma $n - 1$ krawędzi. Przyjmijmy, że G ma $n \geq 3$ wierzchołków i wszystkie grafy spełniające (3) o mniej niż n wierzchołkach spełniają również zależność $|E| \leq |V| - 1$. Usuwając dowolną krawędź z G, rozdzielamy graf na $k \geq 2$ spójnych składowych (faktycznie $k = 2$). Każda składowa spełnia (3), bo inaczej G nie spełniałby (3). Rozważmy każdą spójną składową V_i ze zbiorem krawędzi V_i jako osobne drzewo wolne. Ponieważ każda spójna składowa ma mniej niż $|V|$ wierzchołków, z założenia indukcyjnego wynika, że $|E_i| \leq |V_i| - 1$. Zatem łączna liczba krawędzi we wszystkich składowych razem wynosi co najwyżej $|V| - k \leq |V| - 2$. Jeśli dodamy usuniętą krawędź, to otrzymamy $|E| \leq |V| - 1$.

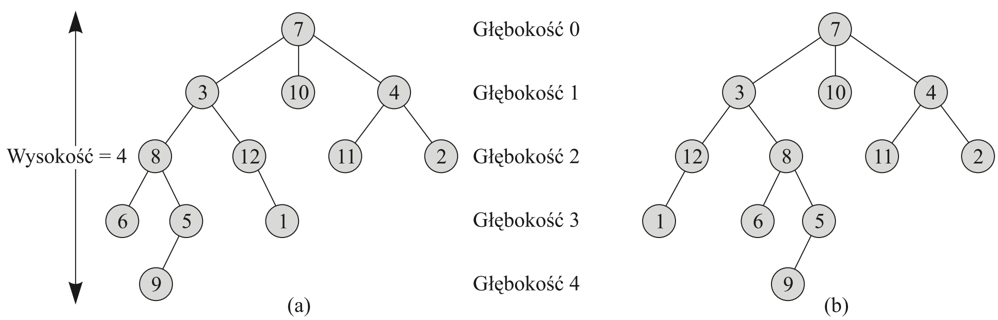
(4) $\Rightarrow$ (5): Przypuśćmy, że G jest spójny i $|E| = |V| - 1$. Musimy wykazać, że G jest acykliczny. Przypuśćmy, że G ma cykl zawierający k wierzchołków $v_1, v_2, \ldots, v_k$, i bez utraty ogólności załóżmy, że ten cykl jest prosty. Niech $G_k = (V_k, E_k)$ będzie podgrafem grafu G stanowiącym właśnie ten cykl. Zauważmy, że $|V_k| = |E_k| = k$. Jeśli $k < |V|$, to musi istnieć wierzchołek $v_{k+1} \in V - V_k$, który jest sąsiadem pewnego wierzchołka $v_i \in V_k$, ponieważ G jest spójny. Zdefiniujmy $G_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ jako podgraf G z $V_{k+1} = V_k \cup \{v_{k+1}\}$ i $E_{k+1} = E_k \cup \{(v_i, v_{k+1})\}$. Zauważmy, że $|V_{k+1}| = |E_{k+1}| = k + 1$. Jeżeli $k + 1 < |V|$, to idąc dalej, możemy w ten sam sposób zdefiniować G_{k+2} itd., aż otrzymamy $G_n = (V_n, E_n)$, gdzie $n = |V|$, $V_n = V$ i $|E_n| = |V_n| = |V|$. Ponieważ G_n jest podgrafem G, mamy $E_n \subseteq E$, więc $|E| \geq |V|$, co jest sprzeczne z założeniem $|E| = |V| - 1$. Tak więc G jest acykliczny.

(5) $\Rightarrow$ (6): Przypuśćmy, że G jest acykliczny i $|E| = |V| - 1$. Niech k będzie liczbą spójnych składowych G. Każda ze spójnych składowych jest z definicji drzewem wolnym i skoro (1) implikuje (5), liczba wszystkich krawędzi we wszystkich spójnych składowych G wynosi $|V| - k$. Tak więc musi być $k = 1$ i w rzeczywistości G jest drzewem. Ponieważ (1) implikuje (2), każde dwa wierzchołki G są połączone jedyną ścieżką prostą. Dodanie do G jakiejkolwiek krawędzi tworzy zatem cykl.

(6) $\Rightarrow$ (1): Załóżmy, że G jest acykliczny, ale jeśli dodamy do E jakąkolwiek krawędź, to utworzymy cykl. Musimy wykazać, że G jest spójny. Niech u i v będą dowolnymi wierzchołkami G. Jeśli u i v nie są sąsiadami, to przez dodanie krawędzi (u, v) utworzymy cykl, którego wszystkie krawędzie poza (u, v) należą do G. Istnieje zatem ścieżka od u do v, a ponieważ u i v zostały wybrane dowolnie, więc G jest spójny. ■

B.5.2 Drzewa ukorzenione i uporządkowane

Drzewo ukorzenione jest drzewem wolnym, w którym jeden z wierzchołków jest wyróżniony – wierzchołek ten nazywamy ***korzeniem*** drzewa. Często wierzchołki drzew ukorzenionych nazywamy ***węzłami***[5] drzewa. Na rysunku B.6(a) widać drzewo ukorzenione mające 12 węzłów z węzłem 7 jako korzeniem.



Rysunek B.6 Drzewa ukorzenione i uporządkowane. (a) Drzewo ukorzenione o wysokości 4 narysowane w standardowy sposób: korzeń (węzeł 7) znajduje się na szczycie, jego synowie (węzły o głębokości 1) poniżej, ich synowie (węzły o głębokości 2) pod nimi itd. Jeśli drzewo jest uporządkowane, to wzajemne uporządkowanie synów węzła od lewej do prawej ma znaczenie; jeśli nie jest – nie ma. (b) Inne drzewo ukorzenione. Jako drzewo ukorzenione jest identyczne z drzewem w (a), lecz jako drzewo uporządkowane różni się od tamtego, gdyż synowie węzła 3 występują w innej kolejności

Rozważmy węzeł x drzewa ukorzenionego T o korzeniu r. Każdy węzeł y na ścieżce prostej z r do x nazywamy ***przodkiem*** (ang. *ancestor*) węzła x. Jeśli y jest przodkiem x, to x jest ***potomkiem*** (ang. *descendant*) węzła y. (Każdy węzeł jest jednocześnie swoim przodkiem i potomkiem). Jeżeli y jest przodkiem x i $x \neq y$, to y jest ***właściwym przodkiem*** x, a x jest ***właściwym potomkiem*** y. ***Poddrzewo*** o korzeniu x jest indukowanym przez zbiór potomków x drzewem, którego korzeniem jest x. Na przykład poddrzewo o korzeniu w węźle 8 na rys. B.6(a) zawiera węzły 8, 6, 5 i 9.

Jeśli ostatnią krawędzią drzewa T na ścieżce prostej od korzenia r do węzła x jest (y, x), to y jest ***ojcem*** (***poprzednikiem***) x, a x jest ***synem*** (***następnikiem***) y. Korzeń jest jedynym węzłem drzewa T, który nie ma ojca. Jeśli dwa węzły mają tego samego ojca, to nazywamy je ***braćmi***.

[5] Określenie „węzeł” jest często używane jako synonim wierzchołka. My będziemy używać terminu „węzeł” w znaczeniu wierzchołka drzewa ukorzenionego.

Węzeł, który nie ma synów, jest ***węzłem zewnętrznym*** lub ***liściem***. Węzeł, który nie jest liściem, jest ***węzłem wewnętrznym***.

Liczba synów węzła x drzewa ukorzenionego T nazywa się ***stopniem***[6] x. Długość ścieżki prostej od korzenia r do węzła x nazywa się ***głębokością*** węzła x w drzewie T. Wszystkie węzły mające tę samą głębokość wyznaczają odpowiadający jej **poziom** drzewa. **Wysokość** węzła w drzewie to liczba krawędzi na najdłuższej ścieżce prostej w dół od tego węzła do liścia; wysokość drzewa to wysokość jego korzenia. Wysokość drzewa jest także równa największej głębokości węzła w drzewie.

Drzewo uporządkowane jest drzewem ukorzenionym, w którym synowie każdego z węzłów są uporządkowani. To znaczy, że jeśli węzeł ma k synów, są to pierwszy syn, drugi syn, ... i k-ty syn. Dwa drzewa widoczne na rys. B.6 są różne jako drzewa uporządkowane, lecz takie same jako drzewa ukorzenione.

B.5.3 Drzewa binarne i pozycyjne

Drzewa binarne najłatwiej zdefiniować rekurencyjnie. ***Drzewo binarne*** T jest strukturą zdefiniowaną na skończonym zbiorze węzłów, która:

- nie zawiera żadnych węzłów, albo
- składa się z trzech rozłącznych zbiorów węzłów: ***korzenia***, drzewa binarnego zwanego ***lewym poddrzewem*** i drzewa binarnego zwanego ***prawym poddrzewem***.

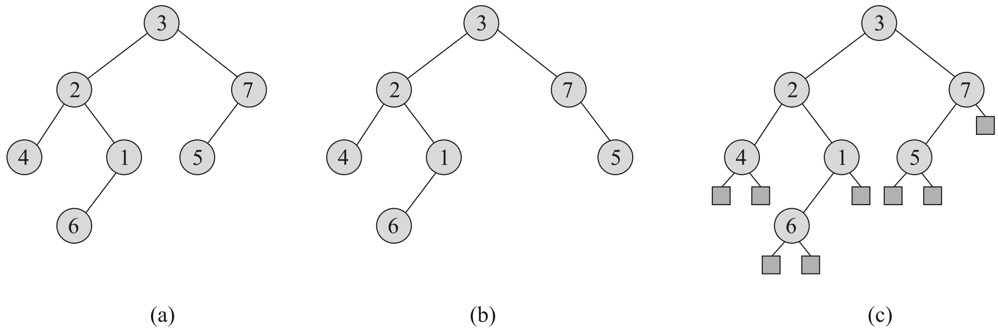
Drzewo binarne, które nie ma żadnych węzłów, nazywa się ***drzewem pustym*** i oznacza się czasami jako NIL. Jeśli lewe poddrzewo jest niepuste, to jego korzeń nazywa się ***lewym synem*** korzenia drzewa głównego. Podobnie, korzeń niepustego prawego poddrzewa jest ***prawym synem*** korzenia drzewa głównego. Jeśli któreś poddrzewo jest drzewem pustym NIL, to mówimy, że ***brakuje*** tego syna. Na rysunku B.7(a) jest pokazane drzewo binarne.

Drzewo binarne nie jest po prostu drzewem uporządkowanym, w którym każdy z węzłów ma stopień co najwyżej 2. W drzewie binarnym na przykład, jeśli węzeł ma tylko jednego syna, to jego położenie – to, czy jest ***lewym*** czy ***prawym synem*** – ma znaczenie. W drzewie uporządkowanym nie ma rozróżnienia pojedynczego syna jako lewego lub prawego. Na rysunku B.7(b) widać drzewo binarne różniące się od tego z rys. B.7(a) położeniem jednego węzła. Jeśli rozpatrzymy te drzewa jako drzewa uporządkowane, to będą one identyczne.

Informacja o położeniu węzłów w drzewie binarnym może być reprezentowana za pomocą wewnętrznych węzłów drzewa uporządkowanego, jak jest to pokazane na rys. B.7(c). Pomysł polega na wstawieniu w miejsce każdego z brakujących synów drzewa binarnego węzła bez synów. Te liście są zaznaczone jako kwadraty. Drzewo, które powstaje, jest ***regularnym drzewem binarnym***: każdy z węzłów jest albo liściem, albo ma stopień 2. Nie ma węzłów o stopniu 1, a porządek synów węzła odpowiada ich położeniu.

---

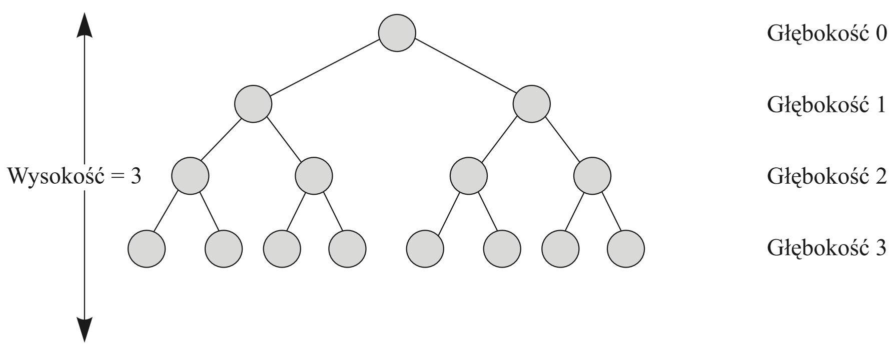
[6] Zauważmy, że stopień węzła zależy od tego, czy T jest drzewem ukorzenionym, czy wolnym. Stopień wierzchołka w drzewie wolnym jest, podobnie jak w dowolnym grafie nieskierowanym, liczbą sąsiednich wierzchołków. Natomiast w drzewie ukorzenionym stopniem węzła jest liczba synów – ojciec węzła nie wlicza się do jego stopnia.



Rysunek B.7 Drzewa binarne. (a) Drzewo binarne narysowane w standardowy sposób. Synowie węzła są narysowani pod nim: lewy po lewej, prawy po prawej stronie. (b) Inne drzewo binarne. W (a) lewy syn węzła 7 to 5, a prawy nie istnieje. W (b) lewy syn 7 nie istnieje, a prawy to 5. Drzewa te jako drzewa uporządkowane są takie same, lecz jako drzewa binarne różnią się od siebie. (c) Drzewo binarne z (a) reprezentowane przez węzły wewnętrzne regularnego drzewa binarnego: drzewa uporządkowanego, w którym stopień każdego węzła wewnętrznego wynosi 2. Liście są zaznaczone jako kwadraciki

Reprezentację pozycyjną, pozwalającą odróżnić drzewa binarne od uporządkowanych, można rozszerzyć na drzewa mające więcej niż 2 synów w węźle. W ***drzewie pozycyjnym*** synowie tego samego węzła są etykietowani różnymi liczbami całkowitymi. Mówimy, że ***brakuje*** i-tego syna, jeśli nie ma syna etykietowanego liczbą i. ***Drzewo rzędu k*** (***k-arne***) jest drzewem pozycyjnym, w którym żaden węzeł nie ma synów etykietowanych liczbami większymi niż k. Tak więc drzewo binarne jest drzewem k-arnym z $k = 2$.

Pełne drzewo k-arne jest drzewem rzędu k, w którym wszystkie liście mają tę samą głębokość, a wszystkie węzły wewnętrzne mają stopień k. Na rysunku B.8 widać pełne drzewo binarne o wysokości 3. Ile liści ma pełne drzewo rzędu k o wysokości h? Korzeń ma k następników o głębokości 1, z których każdy ma k następników o głębokości 2 itd. Liczba węzłów o głębokości d jest równa k^d. W pełnym drzewie k-arnym o wysokości h liście są na głębokości h,



Rysunek B.8 Pełne drzewo binarne o wysokości 3 i 8 liściach oraz 7 węzłach wewnętrznych jest więc k^h liści. Stąd widać, że wysokość drzewa pełnego rzędu k o n liściach wynosi $\log_k n$. Liczba węzłów wewnętrznych drzewa pełnego rzędu k o wysokości h wynosi

$$\begin{aligned} 1 + k + k^2 + \cdots + k^{h-1} &= \sum_{d=0}^{h-1} k^d \\ &= \frac{k^h - 1}{k - 1} \quad \text{(z równania (A.6) na str. 1072).} \end{aligned}$$

Tak więc pełne drzewo binarne o wysokości h ma $2^h - 1$ węzłów wewnętrznych.

Zadania

B.5-1

Narysuj wszystkie drzewa wolne złożone z 3 wierzchołków x, y i z. Narysuj wszystkie drzewa ukorzenione o węzłach x, y i z, w których x jest korzeniem. Narysuj wszystkie drzewa uporządkowane o węzłach x, y i z, w których x jest korzeniem. Narysuj wszystkie drzewa binarne o węzłach x, y i z, w których x jest korzeniem.

B.5-2

Niech $G = (V, E)$ będzie acyklicznym grafem skierowanym, który ma wierzchołek $v_0 \in V$ taki, że istnieje dokładnie jedna ścieżka z v_0 do każdego wierzchołka $v \in V$. Udowodnij, że nieskierowana wersja grafu G tworzy drzewo.

B.5-3

Udowodnij przez indukcję, że w dowolnym niepustym drzewie binarnym liczba węzłów stopnia 2 jest o 1 mniejsza niż liczba liści. Wywnioskuj stąd, że w regularnym drzewie binarnym liczba węzłów wewnętrznych jest o 1 mniejsza od liczby liści.

B.5-4

Udowodnij, że dla dowolnego całkowitego $k \geq 1$ istnieje regularne drzewo binarne o k liściach.

B.5-5

Udowodnij przez indukcję, że wysokość drzewa binarnego o n węzłach wynosi co najmniej $\lfloor \lg n \rfloor$.

★ ***B.5-6***

Długość ścieżki wewnętrznej regularnego drzewa binarnego jest sumą, po wszystkich węzłach wewnętrznych drzewa, głębokości każdego węzła. Podobnie, ***długość ścieżki zewnętrznej*** jest sumą, po wszystkich liściach drzewa, głębokości każdego liścia. Rozważmy regularne drzewo binarne o n węzłach wewnętrznych, długości ścieżki wewnętrznej i oraz długości ścieżki zewnętrznej e. Udowodnij, że $e = i + 2n$.

★ ***B.5-7***
Niech „waga” liścia x o głębokości d drzewa binarnego T będzie wyrażona wzorem $w(x) = 2^{-d}$ i niech L będzie zbiorem liści drzewa T. Udowodnij, że $\sum_{x \in L} w(x) \leq 1$. (Nierówność ta nazywa się ***nierównością Krafta***).

★ ***B.5-8***
Pokaż, że jeśli $L \geq 2$, to każde drzewo binarne o L liściach zawiera poddrzewo mające między $L/3$ a $2L/3$ (włącznie) liści.

Problemy

B-1 Kolorowanie grafów
Dla grafu nieskierowanego $G = (V, E)$ ***k-kolorowanie*** G jest funkcją $c\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ taką, że $c(u) \neq c(v)$ dla każdej krawędzi $(u, v) \in E$. Innymi słowy, liczby $1, 2, \ldots, k$ reprezentują k kolorów, a sąsiednie wierzchołki muszą być innych kolorów.

(a) Pokaż, że każde drzewo jest 2-kolorowalne.

(b) Pokaż, że równoważne są następujące stwierdzenia:

1. G jest dwudzielny.
2. G jest 2-kolorowalny.
3. G nie ma cykli nieparzystej długości.

(c) Niech d będzie maksimum stopni wierzchołków w grafie G. Udowodnij, że graf G można pokolorować $d + 1$ kolorami.

(d) Pokaż, że jeśli G ma $O(|V|)$ krawędzi, to G można pokolorować $O(\sqrt{|V|})$ kolorami.

B-2 Grafy znajomości
Sformułuj każde z następujących stwierdzeń w postaci twierdzenia dotyczącego grafów nieskierowanych, a następnie udowodnij je. Przyjmij, że relacja znajomości jest symetryczna, ale nie zwrotna.

(a) W dowolnej grupie złożonej z co najmniej dwóch osób jest co najmniej dwoje ludzi mających tę samą liczbę znajomych w tej grupie.

(b) W każdej grupie złożonej z sześciu osób znajdzie się co najmniej troje wzajemnie sobie znajomych albo co najmniej troje wzajemnie sobie nieznajomych.

(c) Dowolną grupę ludzi można tak podzielić na dwie części, że co najmniej połowa znajomych każdej z osób należy do grupy, do której ta osoba *nie* należy.

(d) Jeśli każda osoba w danej grupie zna co najmniej połowę osób w tej grupie, to można posadzić całą grupę przy okrągłym stole tak, żeby każda osoba siedziała pomiędzy dwoma znajomymi.

B-3 Podziały drzew

W wielu algorytmach typu „dziel i zwyciężaj", które operują na grafach, wymaga się dokonania podziału grafu na dwa podgrafy prawie tej samej wielkości, indukowane przez pewien podział zbioru wierzchołków. W tym problemie zajmiemy się podziałami drzew powstającymi przez usunięcie niewielkiej liczby krawędzi. Żądamy, by wierzchołki pozostające w tym samym podrzewie po usunięciu krawędzi były w tym samym bloku podziału.

(a) Pokaż, że usuwając jedną krawędź, możemy podzielić wierzchołki dowolnego drzewa binarnego o n wierzchołkach na dwa zbiory A i B takie, że $|A| \leq 3n/4$ i $|B| \leq 3n/4$.

(b) Pokaż, że stała $3/4$ w części (a) jest optymalna, konstruując drzewo, w którym najbardziej zrównoważony podział powstający w wyniku usunięcia jednej krawędzi daje $|A| = 3n/4$.

(c) Pokaż, że przez usunięcie co najwyżej $O(\lg n)$ krawędzi możemy podzielić wierzchołki dowolnego drzewa o n wierzchołkach na dwa zbiory A i B takie, że $|A| = \lfloor n/2 \rfloor$ i $|B| = \lceil n/2 \rceil$.

Uwagi do dodatku

G. Boole zapoczątkował rozwój logiki symbolicznej i wprowadził wiele podstawowych oznaczeń dla zbiorów w książce wydanej w 1854 r. Współczesna teoria zbiorów została stworzona przez G. Cantora w latach 1874–1895. Cantor przede wszystkim skupił się na zbiorach o nieskończonej liczności. Termin „funkcja" jest związany z nazwiskiem G.W. Leibniza, który pierwszy użył go w związku z pewnymi typami wzorów matematycznych. Jego ograniczona definicja była uogólniana wiele razy. Początki teorii grafów sięgają 1736 r., kiedy to L. Euler dowiódł, że nie da się przejść żadnego z siedmiu mostów Królewca dokładnie jednokrotnie i wrócić do punktu wyjścia.

Użytecznym kompendium wielu definicji i wyników teorii grafów jest książka napisana przez Harary'ego [208].